



多分思维 高效学习

阅盟学堂

YUEMENG XUETANG

2025 全新版

高效课堂

培优辅困

导教导学

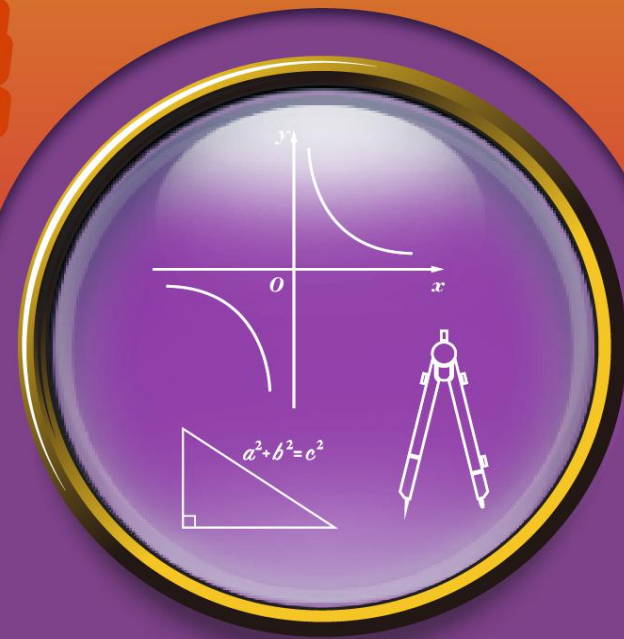
层层递进

零障碍

LINGZHANG' AI DAOJIAO DAOXUE AN

导教导学案

九年级 全一册 RJ版



课件使用说明

本课件使用WPS2019版本制作, 建议老师使用相应软件打开。

课件问题反馈、建议、写稿、购书, 请加下方企业微信号联系。



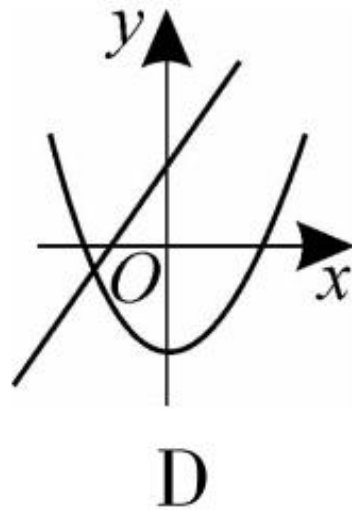
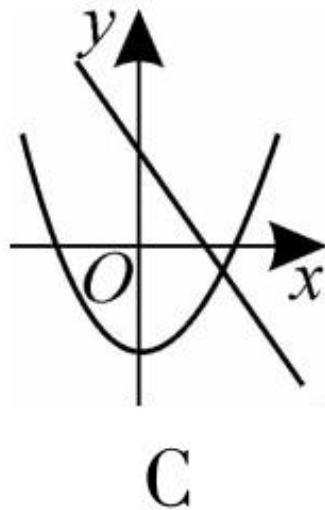
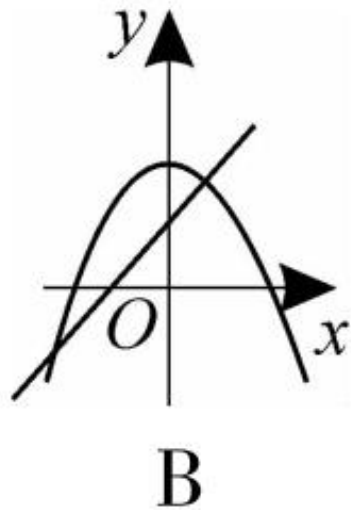
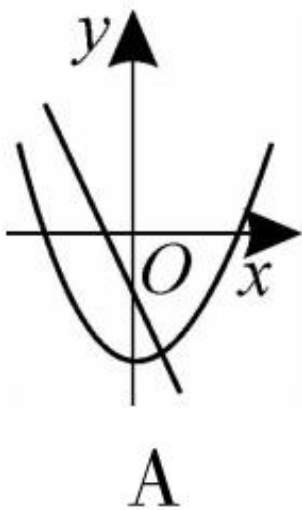
本课件由文本框制作, 全文可编辑, 老师只需点击文本框编辑修改。

数学公式由公式编辑器制作, 可双击公式跳转公式编辑器修改。

第二十二章 二次函数

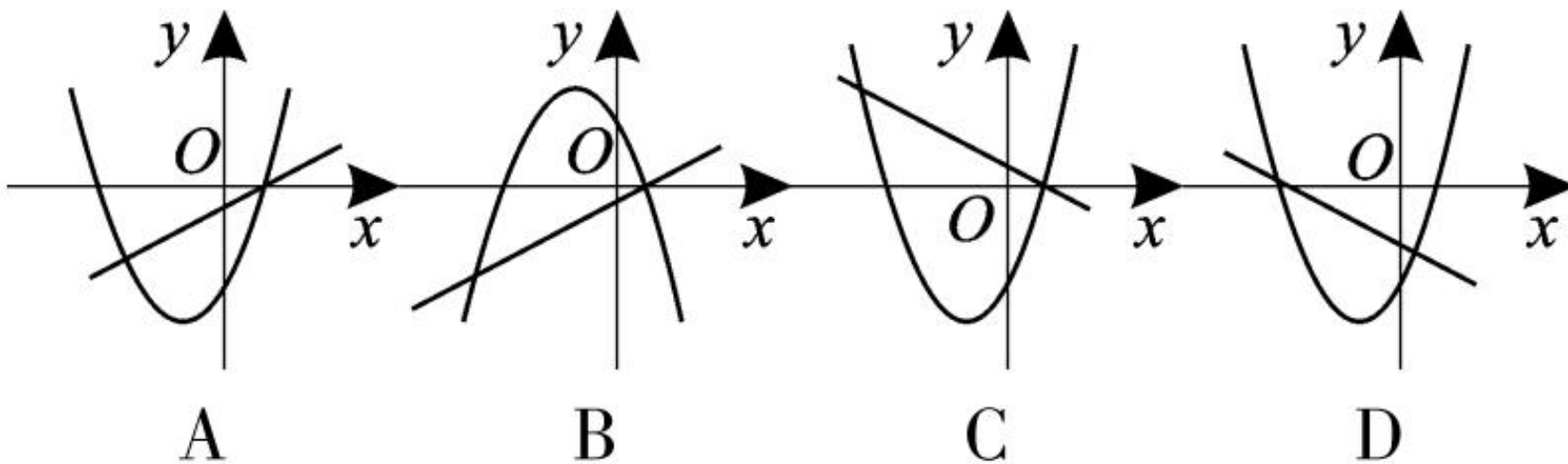
一 二次函数的图象

1. (2024·南沙区校级月考)在同一坐标系中，一次函数 $y = -mx + n^2$ 与二次函数 $y = x^2 + m$ 的图象可能是 (**D**)



2. 在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx-2k$ 和二次函数 $y=-kx^2+2x-4$ (k 是常数且 $k\neq 0$)的图象可能是

(C)

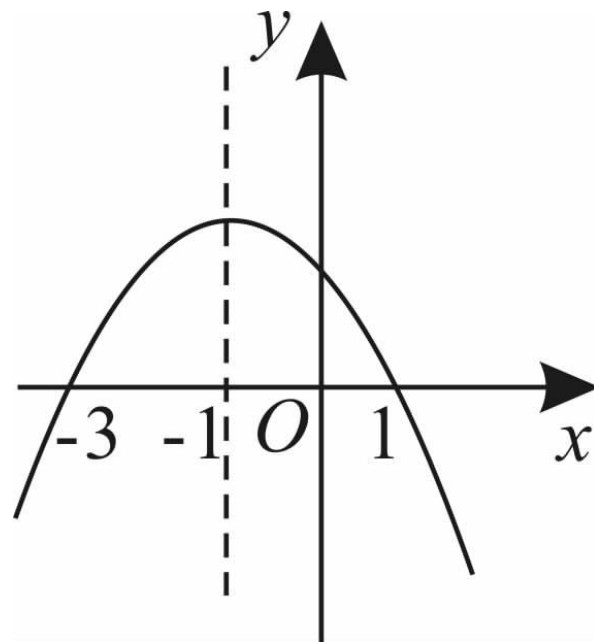


二 抛物线中 a , b 和 c 的几何意义

3. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$, 如图, 直线 $x=-1$ 是其对称轴, 与 x 轴的一个交点为 $(-3, 0)$.

(1)判断符号: a < 0 , b < 0 , c > 0 , b^2-4ac > 0 ,
 $a-b+c$ > 0 ; $a+b+c$ = 0 .

(2)当 x 满足 $x>1$ 或 $x<-3$ 时, $y<0$.



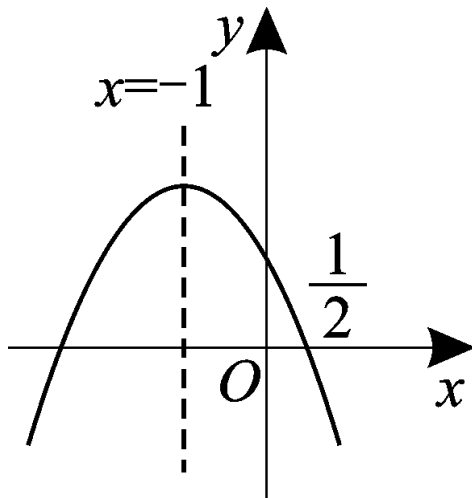
4. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴是直线 $x = -1$, 且过点 $(\frac{1}{2}, 0)$, 有下列结论: ① $abc > 0$; ② $a - 2b + 4c = 0$; ③ $3b + 2c > 0$; ④ $a - b \geq m(am - b)$, 其中正确的结论为 (**D**)

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ①④



三 二次函数的应用

中考热点① 复杂靠墙问题

5. (2024·珠海期中)为进一步落实“双减增效”政策,某校增设活动拓展课程——开心农场.如图,准备利用现成的一堵“L”字形的墙面(粗线 ABC 表示墙面,已知 $AB \perp BC$, $AB=3$ 米, $BC=1$ 米)和总长为14米的篱笆围建一个“日”字形的小型农场 $DBEF$ (细线表示篱笆,小型农场中间 GH 也是用篱笆隔开),点 D 可能在线段 AB 上(如图1),也可能在线段 BA 的延长线上(如图2),点 E 在线段 BC 的延长线上.

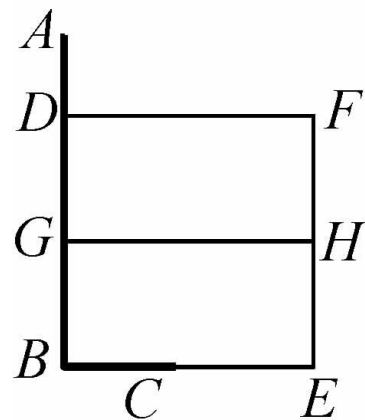


图1

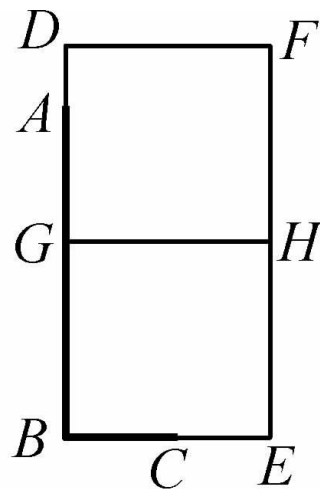


图2

(1)当点 D 在线段 AB 上时,

①设 DF 的长为 x 米, 请用含 x 的代数式表示 EF 的长.

②若要求所围成的小型农场 $DBEF$ 的面积为12平方米, 求 DF 的长.

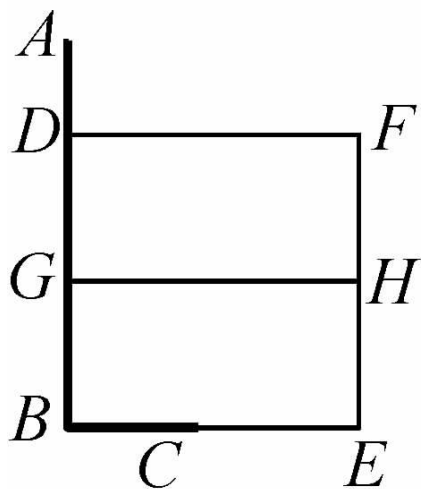


图1

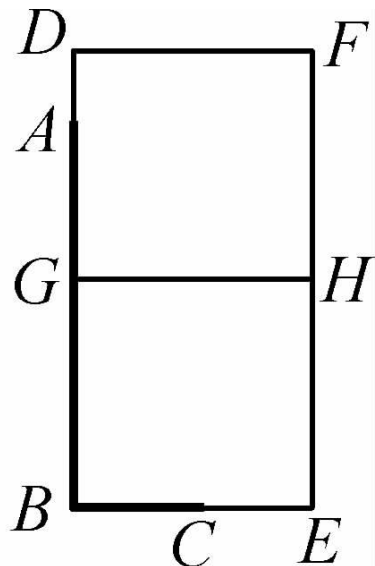


图2

解：(1)① $\because$ 点 D 在线段 AB 上，

$$\therefore EF = 14 - 2x - (x - 1) = (15 - 3x)(\text{米}).$$

$$\because AB = 3,$$

$$\therefore 0 < EF \leq 3, \text{ 即 } 0 < 15 - 3x \leq 3.$$

$$\therefore 4 \leq x < 5.$$

②依题意，得 $x(15 - 3x) = 12$ ，

解得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 1$ (不合题意，舍去).

$$\therefore x = 4.$$

$\therefore DF$ 的长为4米.

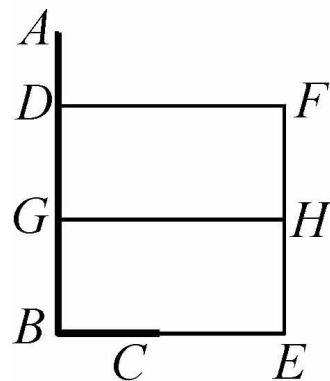


图1

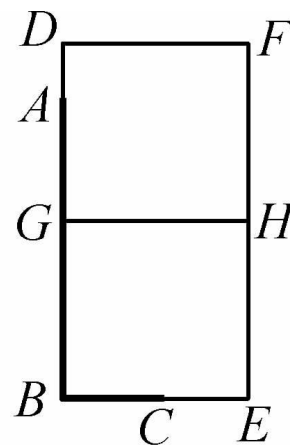


图2

(2)当 DF 的长为多少米时, 小型农场 $DBEF$ 的面积最大?
最大面积为多少平方米?

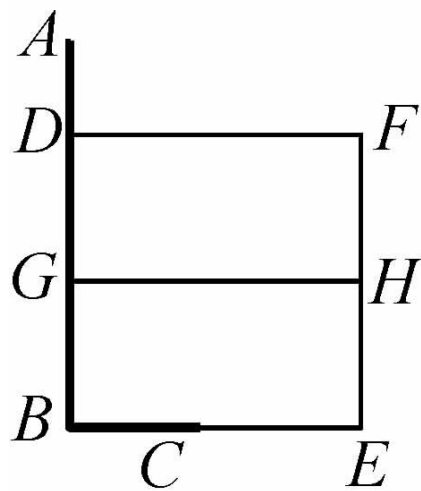


图1

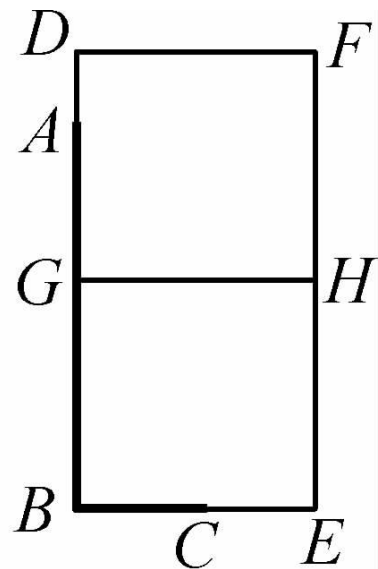


图2

解：(2)设小型农场 $DBEF$ 的面积为 S 平方米， DF 的长为 x 米.

①当点 D 在线段 AB 上时，由(1)知此时 $4 \leq x < 5$,

$$\text{则 } S = x(15 - 3x) = -3x^2 + 15x = -3 \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{75}{4},$$

$\because -3 < 0$ ，抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore$ 当 $x > \frac{5}{2}$ 时， S 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时， S 有最大值， $S_{\text{最大}} = -3 \times 4^2 + 15 \times 4 = 12$;

②当点 D 在线段 BA 的延长线上时，此时 $x < 4$,

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}(15 - 3x + 3)x = -\frac{3}{2}x^2 + 9x = -\frac{3}{2}(x - 3)^2 + \frac{27}{2},$$

$$\because -\frac{3}{2} < 0, \quad 3 < 4,$$

$$\therefore \text{当 } x = 3 \text{ 时, } S \text{ 有最大值, } S_{\text{最大}} = \frac{27}{2}.$$

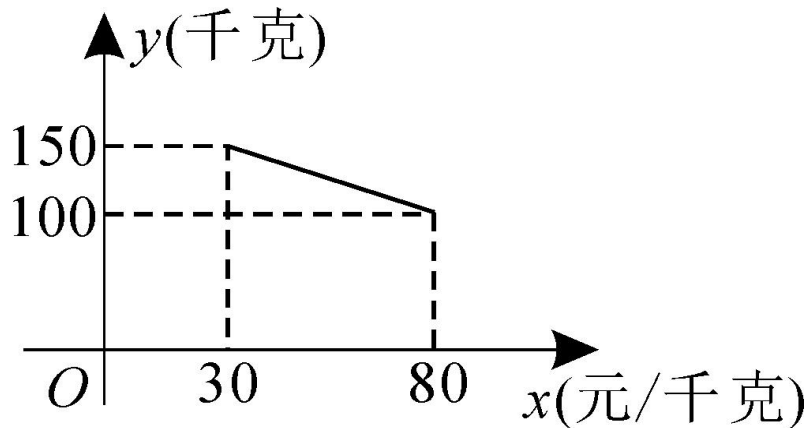
$$\because \frac{27}{2} > 12,$$

$\therefore$ 当 DF 的长为 3 米时, 小型农场 $DBEF$ 的面积最大, 最大面积为 $\frac{27}{2}$ 平方米.

中考热点② 销售问题

6. (2024·天河区校级期中)某超市销售一种商品，成本价为30元/千克，经市场调查，每天的销售量 y (千克)与销售价格 x (元/千克)之间的关系如图所示，假设每千克售价不能低于30元，且不低于80元.

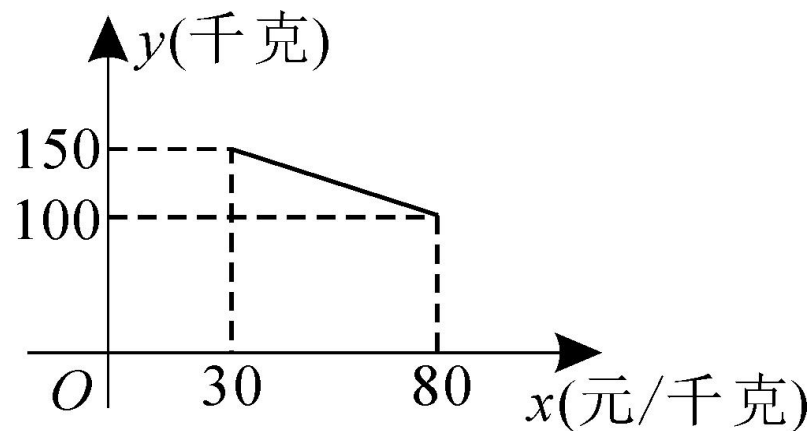
(1)求 y 与 x 之间的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围；



解：(1)设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b(k \neq 0)$.

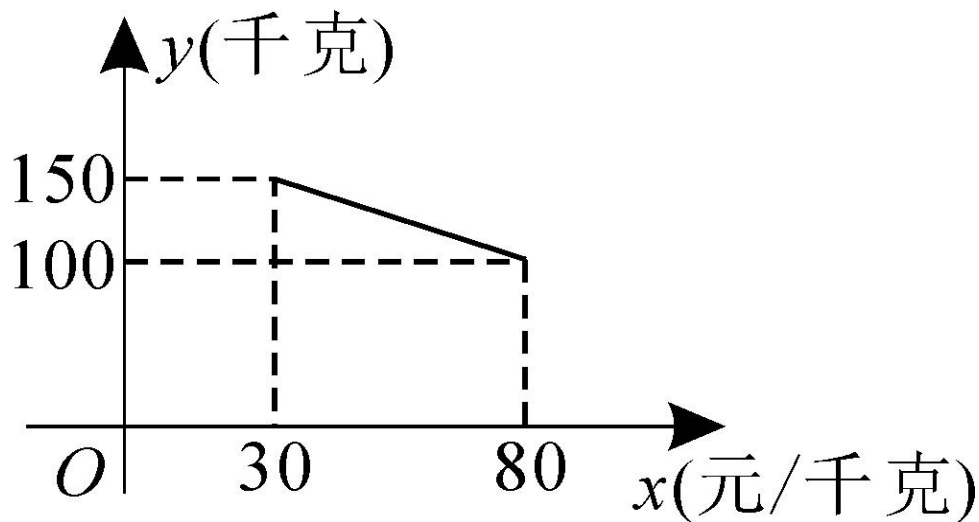
将点 $(30, 150)$, $(80, 100)$ 代入,

得 $\begin{cases} 30k + b = 150, \\ \text{解得 } 80k + b = 100, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -1, \\ b = 180. \end{cases}$



$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y = -x + 180(30 \leq x \leq 80)$.

(2)若每天的总利润为 w 元，求出 w 关于 x 的函数关系式，并求出当销售单价定为多少元时，该超市每天的利润最大；最大利润是多少元.



解：(2)依题意，得

$$w = y(x - 30) = (-x + 180)(x - 30) = -(x - 105)^2 + 5\,625,$$

$$\because -1 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x < 105$ 时， w 随 x 的增大而增大.

$$\text{又} \because 30 \leq x \leq 80,$$

$\therefore$ 当 $x = 80$ 时， w 取最大值，此时 $w = 5\,000$,

即销售单价定为 80 元时，该超市每天的利润最大，最大利润是 5 000 元.

中考热点③ 抛物线形问题

7. (2024·香洲区校级期中)蔬菜大棚是一种具有出色的保温性能的框架覆膜结构，它的出现使得人们可以吃到反季节蔬菜，一般蔬菜大棚使用竹结构或者钢结构的骨架，上面覆上一层或多层保温塑料膜，这样就形成了一个温室空间. 如图，某个温室大棚的横截面可以看作矩形 $ABCD$ 和抛物线 AED 构成，其中 $AB=3\text{ m}$ ， $BC=4\text{ m}$ ，取 BC 的中点 O ，过点 O 作线段 BC 的垂直平分线 OE 交抛物线 AED 于点 E ，若以点 O 为原点， BC 所在直线为 x 轴， OE 所在直线为 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，请解答下列问题：

(1)如图1, 已知抛物线 AED 的顶点 E 的坐标为 $(0, 4)$, 求抛物线的解析式;

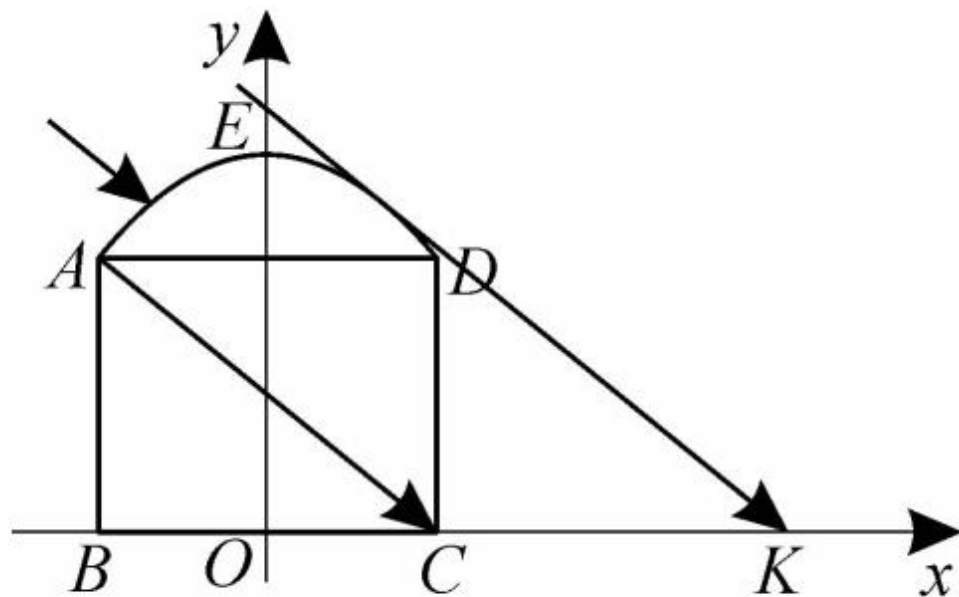


图1

解：(1) $\because$ 抛物线 AED 的顶点 E 的坐标为 $(0, 4)$,

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, OE 为 BC 的中垂线,

$\therefore AD = BC = 4 \text{ m}$, $OB = 2 \text{ m}$.

又 $\because AB = 3 \text{ m}$, $\therefore A(-2, 3)$.

将点 A 的坐标代入 $y = ax^2 + 4$, 得 $4a + 4 = 3$,

解得 $a = -\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

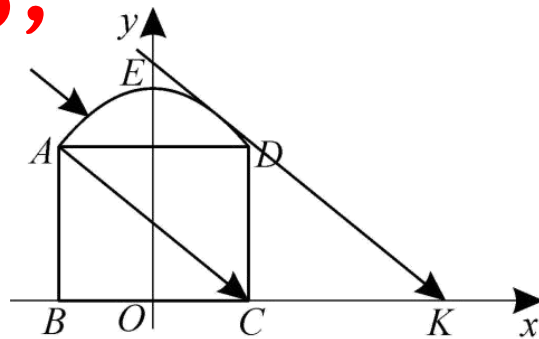


图1

(2)如图2，为了保证蔬菜大棚的通风性，该大棚要安装两个正方形孔的排气装置 $LFGT$ ， $SMNR$ (点 L ， R 在抛物线上，点 F ， G ， M ， N 在线段 AD 上)，若 $FL=NR=0.75$ m，求两个正方形装置的间距 GM 的长；

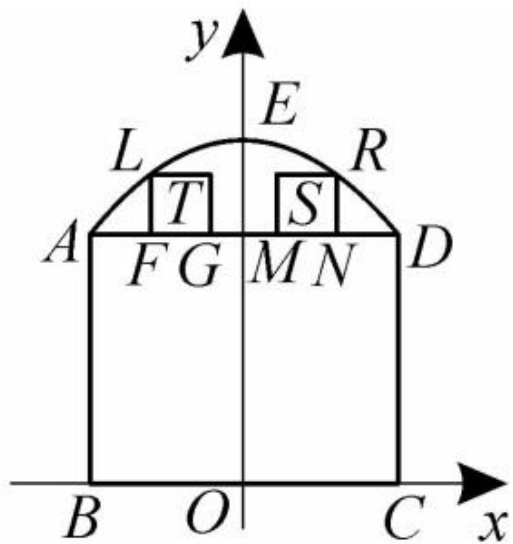


图2

解：(2) 设 $G(-t, 3)$ ，则 $L\left(-t - \frac{3}{4}, 3 + \frac{3}{4}\right)$ 。

$$\therefore 3 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}\left(-t - \frac{3}{4}\right)^2 + 4,$$

解得 $t = \frac{1}{4}$ (负值已舍去)。

$\therefore$ 两个正方形装置的间距 GM 的长为 $\frac{1}{2}$ m。

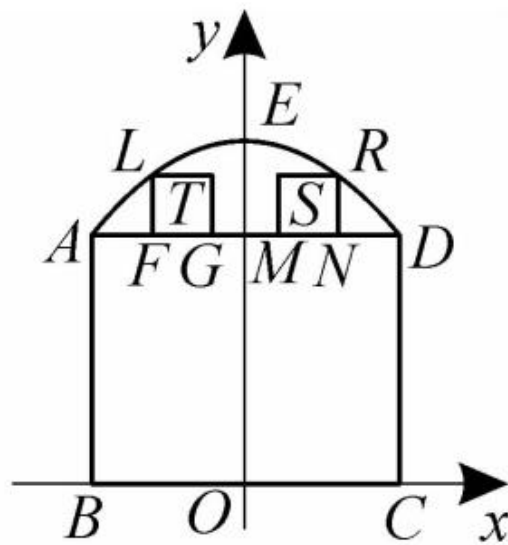


图2

(3)如图1, 在某一时刻, 太阳光线(平行线)透过点 A 恰好照射到点 C , 此时大棚截面的阴影为 BK , 求 BK 的长.

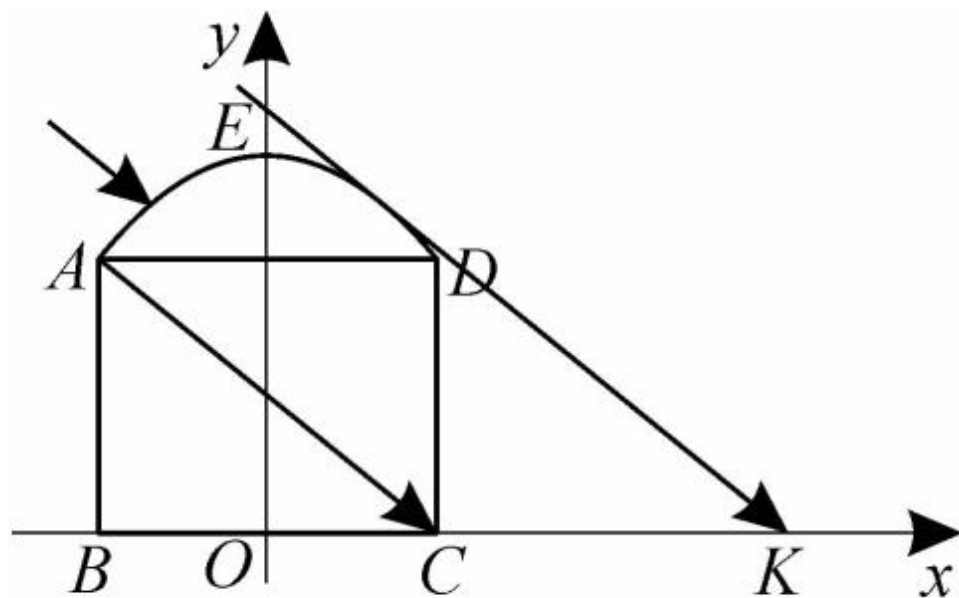


图1

解：(3)依题意，得 $B(-2, 0)$ ， $C(2, 0)$ ，

由点 A ， C 的坐标，可得直线 AC 的解析式为

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2},$$

∵太阳光线为平行线，

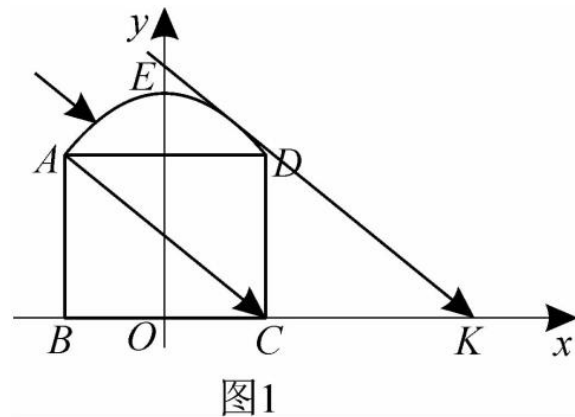


图1

∴设过点 K 平行于 AC 的直线的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + m$.

依题意，得直线 $y = -\frac{3}{4}x + m$ 与抛物线相切，

联立
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4, \\ y = -\frac{3}{4}x + m, \end{cases}$$

整理，得 $x^2 - 3x + 4m - 16 = 0$,

$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4(4m - 16) = 0$, 解得 $m = \frac{73}{16}$.

当 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{73}{16} = 0$ 时, $x = \frac{73}{12}$. $\therefore K\left(\frac{73}{12}, 0\right)$.

$\because B(-2, 0)$,

$\therefore BK = 2 + \frac{73}{12} = \frac{97}{12}(\text{m})$.

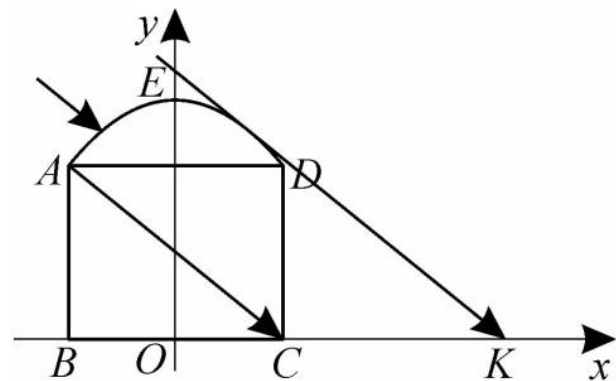


图1

四二次函数的综合

中考热点① 与特殊四边形综合

8. (2024·黄埔区校级期中)如图1, 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ ($a \neq 0$)与 x 轴相交于 $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$ 两点, 与 y 轴相交于点 C .

(1)求该抛物线的函数表达式.

解: (1)依题意, 设该抛物线的函数表达式为

$$y=a(x+3)(x-1), \text{ 即 } y=ax^2+2ax-3a,$$

$$\therefore -3a=3, \text{ 解得 } a=-1.$$

$$\therefore \text{该抛物线的函数表达式为 } y=-x^2-2x+3.$$

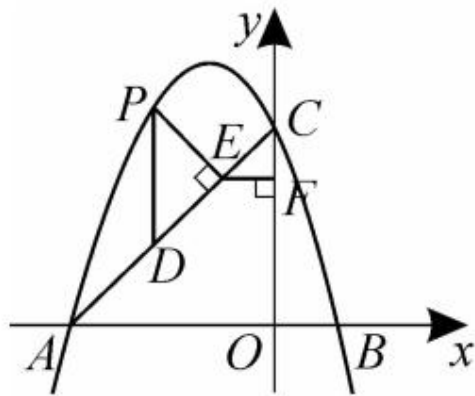


图1

(2) P 是位于直线 AC 上方抛物线上的一个动点，过点 P 作 $PD \parallel y$ 轴交 AC 于点 D ，作 $PE \perp AC$ 于点 E ，过点 E 作 $EF \perp y$ 轴于点 F ，求出 $PD + EF$ 的最大值及此时点 P 的坐标.

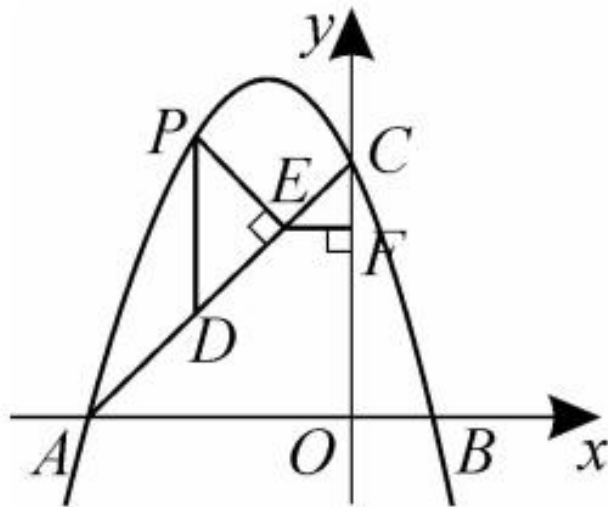


图1

解：(2)依题意，得 $C(0, 3)$ ，

则 $\triangle OAC$ 为等腰直角三角形， $\angle CAO = 45^\circ$.

由点 A ， C 的坐标，可得直线 AC 的解析式为 $y = x + 3$ ，

$\because$ 点 P 在抛物线上， $PD \parallel y$ 轴交 AC 于点 D ，

$\therefore$ 设 $P(m, -m^2 - 2m + 3)$ ，则 $D(m, m + 3)$.

$\therefore PD = -m^2 - 3m$ ，其中 $-3 < m < 0$.

如图1，延长 FE 交 PD 于点 G ，则 $FG \perp PD$.

易知 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore EG = \frac{1}{2}PD = \frac{-m^2 - 3m}{2}.$$

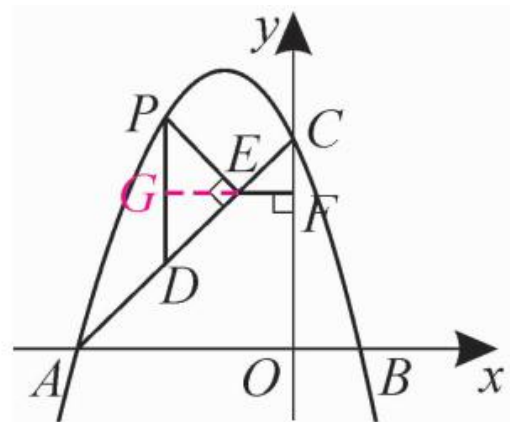


图1

$$\therefore EF = -m - \frac{-m^2 - 3m}{2} = \frac{m^2 + m}{2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore PD + EF &= -m^2 - 3m + \frac{m^2 + m}{2} = -\frac{1}{2}m^2 - \frac{5}{2}m \\ &= -\frac{1}{2}\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{8}, \end{aligned}$$

$$\because -\frac{1}{2} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } m = -\frac{5}{2} \text{ 时, } PD + EF \text{ 有最大值 } \frac{25}{8}, \text{ 此时 } P\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right).$$

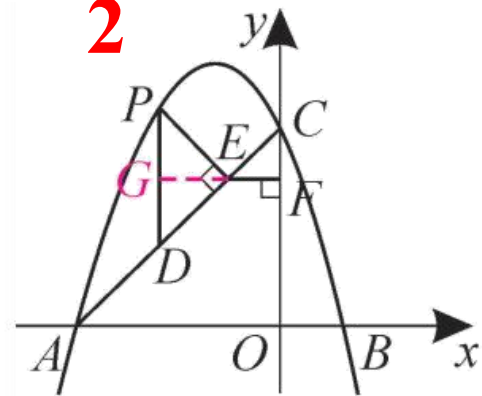


图1

(3)如图2, 将原抛物线向左平移2个单位长度得到抛物线 y' , y' 与原抛物线相交于点 M , N 为原抛物线对称轴上的一点, 在平面直角坐标系中是否存在点 H , 使以点 A , M , N , H 为顶点的四边形为矩形? 若存在, 请直接写出点 H 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

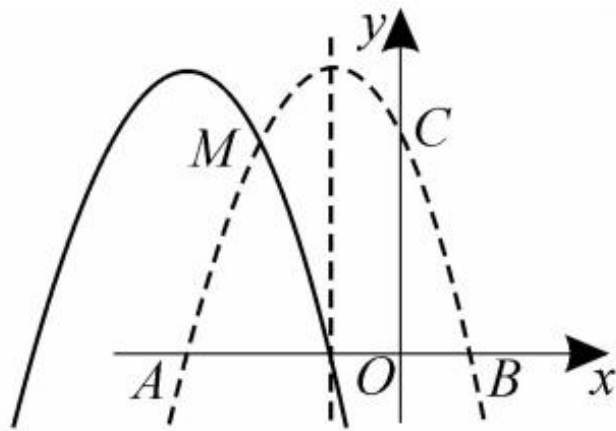


图2

解：(3)由平移可求得平移后函数解析式为

$y' = -(x+3+2)(x-1+2) = -x^2 - 6x - 5$ ，与原函数相交于点 $M(-2, 3)$ 。

①如图2，以 AM 为边，作 $MN_1 \perp AM$ 交原抛物线的对称轴于点 N_1 ，可构造矩形 AMN_1H_1 ，设 $N_1(-1, y_1)$ 。

$$\therefore AM^2 = 10, MN_1^2 = [(-1) - (-2)]^2 + (y_1 - 3)^2,$$

$$AN_1^2 = [(-1) - (-3)]^2 + (y_1 - 0)^2.$$

$$\therefore AM^2 + MN_1^2 = AN_1^2,$$

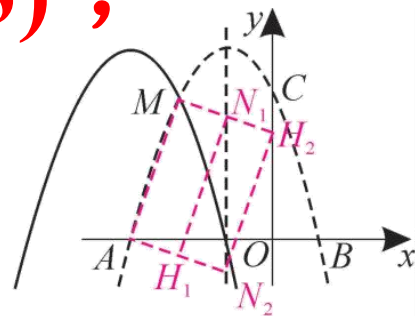


图2

$$\therefore 10 + [(-1) - (-2)]^2 + (y_1 - 3)^2 = [(-1) - (-3)]^2 + (y_1 - 0)^2,$$

解得 $y_1 = \frac{8}{3}$, 即 $N_1 \left(-1, \frac{8}{3} \right)$.

此时设 $H_1(p_1, q_1)$, 由 A, M, N_1, H_1 四点的相对位置关系, 可得

$$\begin{cases} (-1) + (-3) = (-2) + p_1, \\ 0 + \frac{8}{3} = 3 + q_1, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} p_1 = -2, \\ q_1 = -\frac{1}{3}. \end{cases} \therefore H_1 \left(-2, -\frac{1}{3} \right);$$

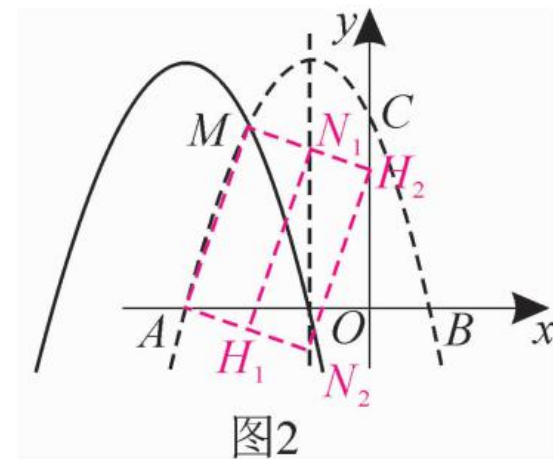


图2

②同理, 以 AM 为边, 作 $AN_2 \perp AM$ 交对原抛物线的称轴于点 N_2 , 可构造矩形 AMH_2N_2 , 设 $N_2(-1, y_2)$.

$$\because AM^2 + AN_2^2 = MN_2^2,$$

$$\therefore 10 + [(-1) - (-3)]^2 + (y_2 - 0)^2 = [(-1) - (-2)]^2 + (y_2 - 3)^2,$$

$$\text{解得 } y_2 = -\frac{2}{3}, \text{ 即 } N_2 \left(-1, -\frac{2}{3} \right).$$

此时设 $H_2(p_2, q_2)$, 由 A, M, N_2, H_2 四点的相对位置关系, 可得

$$\begin{cases} (-1) + (-2) = (-3) + p_2, \\ 3 + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0 + q_2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} p_2 = 0, \\ q_2 = \frac{7}{3}. \end{cases} \quad \therefore H_2 \left(0, \frac{7}{3} \right);$$

③如图3, 以 AM 为对角线, 作 $MN_3 \perp AN_3$ 交原抛物线的对称轴于点 N_3 , 可构造矩形 AN_3MH_3 , 设 $N_3(-1, y_3)$.

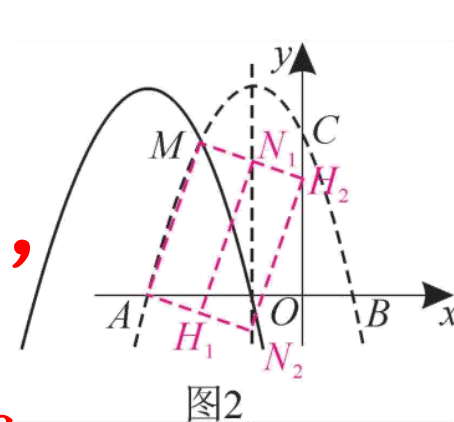


图2

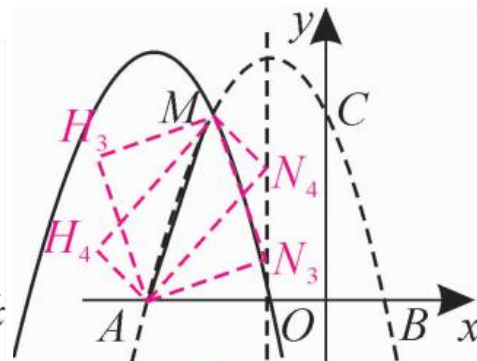


图3

$$\because AM^2 = AN_3^2 + MN_3^2,$$

$$\therefore 10 = [(-1) - (-3)]^2 + (y_3 - 0)^2 + [(-1) - (-2)]^2 + (y_3 - 3)^2,$$

解得 $y_3 = 1$, $y_4 = 2$, 即 $N_3(-1, 1)$, $N_4(-1, 2)$,

此时设 $H_3(p_3, q_3)$, 由 A, M, N_3, H_3

四点的相对位置关系, 可得

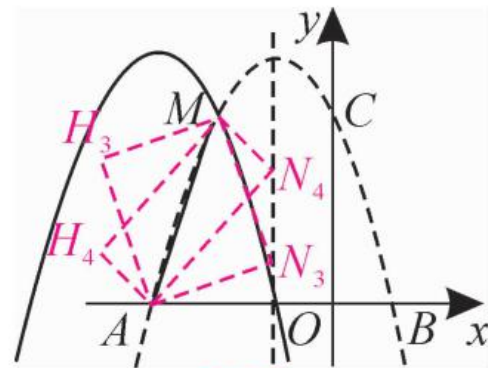
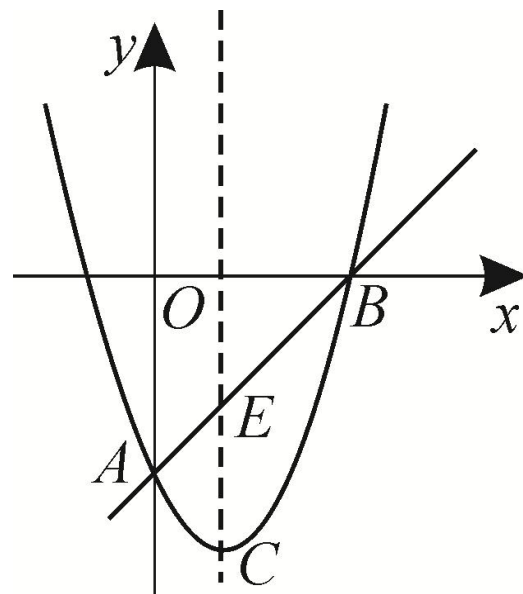


图 3

$$\begin{cases} (-3) + (-2) = (-1) + p_3, \\ 3 + 0 = 1 + q_3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} p_3 = -4, \\ q_3 = 2. \end{cases} \therefore H_3(-4, 2);$$

9. (2024·中山期末)如图, 已知抛物线 $y=ax^2-2x+c$ 与直线 $y=kx+b$ 都经过 $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ 两点, 该抛物线的顶点为 C .



(1)求此抛物线和直线 AB 的表达式.

解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - 2x + c$ 经过 $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ 两点,

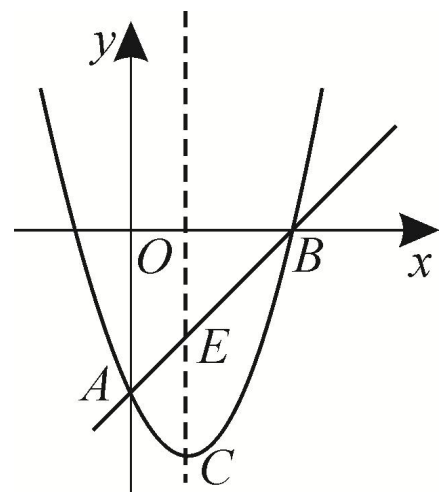
$$\therefore \begin{cases} 9a - 6 + c = 0, \\ c = -3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ c = -3. \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

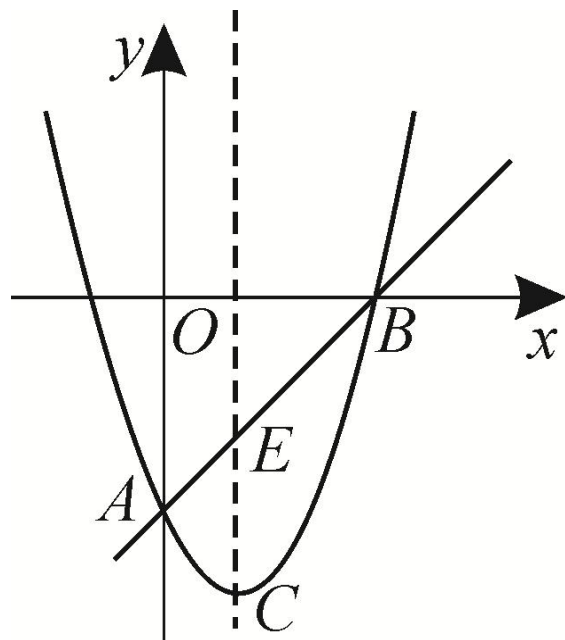
$\because$ 直线 $y = kx + b$ 经过 $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 0, \\ b = -3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = 1, \\ b = -3. \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y = x - 3$.



(2) 设直线 AB 与该抛物线的对称轴相交于点 E ，在射线 EB 上是否存在一点 M ，过点 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N ，使点 M, N, C, E 是平行四边形的四个顶点？若存在，直接写出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。



解：(2)存在.

$$\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点 C 的坐标为 $(1, -4)$.

$\because CE \parallel y$ 轴, 点 E 在直线 $y = x - 3$ 上,

$$\therefore E(1, -2). \therefore CE = 2.$$

①如图1, 连接 CN ,

若点 M 在 x 轴的下方, 四边形 $CEMN$ 为平行四边形, 则 $CE = MN$.

设 $M(a, a - 3)$, 则 $N(a, a^2 - 2a - 3)$.

$$\therefore MN = (a - 3) - (a^2 - 2a - 3) = -a^2 + 3a.$$

$$\therefore -a^2 + 3a = 2, \text{ 解得 } a = 2 \text{ 或 } a = 1 (\text{不合题意, 舍去}).$$

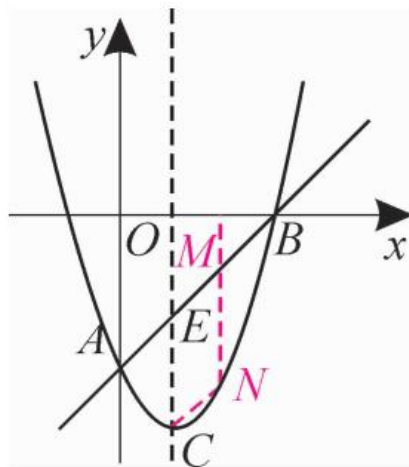


图 1

$\therefore M(2, -1)$;

②如图2, 连接 EN , CM , MN ,
若点 M 在 x 轴的上方, 四边形 $CENM$ 为
平行四边形, 则 $CE=MN$.

设 $M(a, a-3)$, 则 $N(a, a^2-2a-3)$.

$\therefore MN=a^2-2a-3-(a-3)=a^2-3a$.

$\therefore a^2-3a=2$, 解得 $a=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ 或 $a=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (不合题意,

舍去). $\therefore M\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

综上所述, 点 M 的坐标为 $(2, -1)$ 或 $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

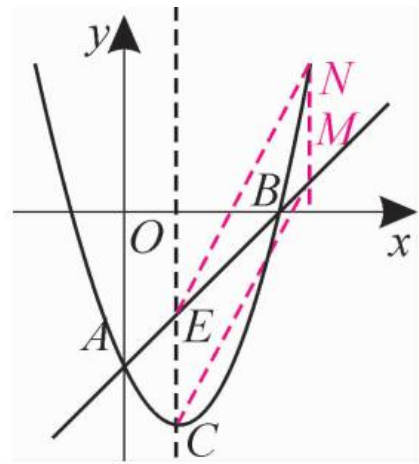


图 2

中考热点② 二次函数与角度

10. 如图1, 抛物线 $y=ax^2+c$ 与 x 轴交于点 A , B , 与 y 轴交于点 C , P 为 x 轴下方抛物线上一点, 若 $OC=2OA=4$.

(1)求抛物线解析式;

解: (1) $\because OC=4$, $\therefore c=-4$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=ax^2-4$,

$\because OC=2OA=4$, $\therefore A(-2, 0)$,

$\therefore 0=4a-4$, 解得 $a=1$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-4$.

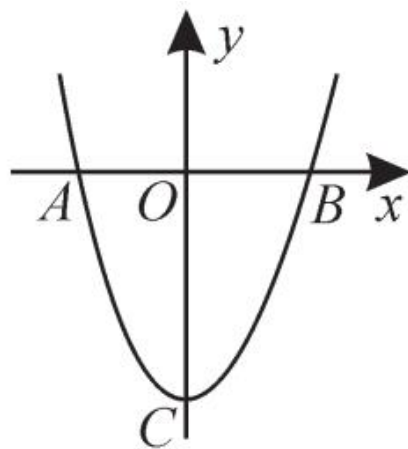


图1

(2)如图2, 若 $\angle ABP = \angle ACO$, 求点 P 的坐标.

解: (2)如图2, 过点 A 作 x 轴的垂线交 BP 的延长线于点 Q .

在 $\triangle BAQ$ 和 $\triangle COA$ 中,
$$\begin{cases} \angle QAB = \angle AOC = 90^\circ, \\ AB = OC = 4, \\ \angle ABQ = \angle OCA, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAQ \cong \triangle COA (ASA),$

$\therefore AQ = OA = 2, \therefore Q(-2, -2).$

设直线 BQ 的解析式为 $y = kx + b$.

把 $B(2, 0), Q(-2, -2)$ 代入,

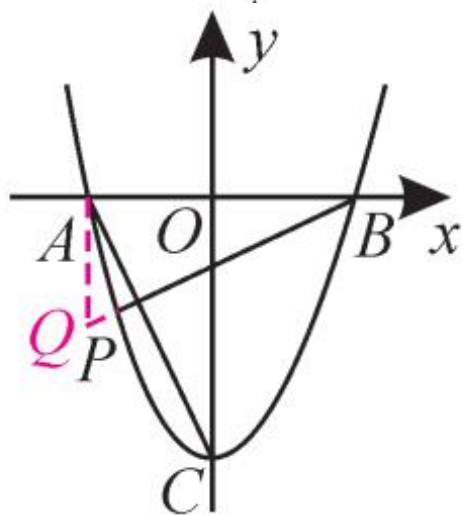


图2

得 $\begin{cases} 2x + b = 0, \\ -2x + b = -2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = -1, \end{cases}$

$\therefore$ 直线 BQ 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 1$,

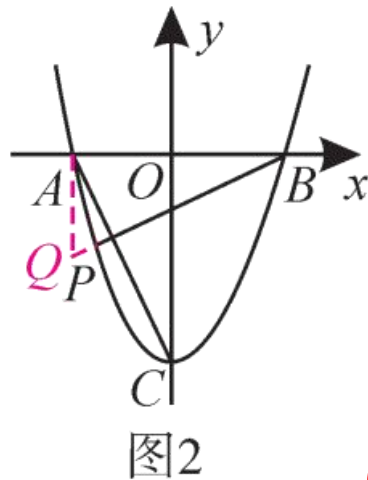


图2

联立 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 0, \end{cases}$ (不合题意, 舍去) 或 $\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2}, \\ y_2 = -\frac{7}{4}. \end{cases}$

$\therefore$ 点 P 坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$.

中考热点③ 二次函数与直角三角形综合

11. 已知抛物线 $y = a(x-1)^2 + k$ (a, k 为常数, $a > 0$) 的顶点为 P , 对称轴与 x 轴相交于点 D , 点 $M(m, 1)$ 在抛物线上, $m > 1$, O 为坐标原点.

【构建联系】

(1) 如图1, 当 $a = 1$, 抛物线与 y 轴相交于点 $(0, -1)$ 时, 求该抛物线顶点 P 的坐标;

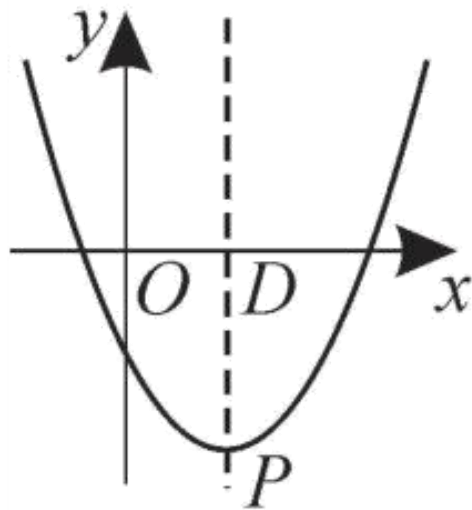


图1

解：(1) $\because a=1$ ，抛物线与 y 轴相交于点 $(0, -1)$ ，

$\therefore (0-1)^2 + k = -1$ ，解得 $k = -2$ 。

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = (x-1)^2 - 2$ 。

$\therefore$ 该抛物线顶点 P 的坐标为 $(1, -2)$ 。

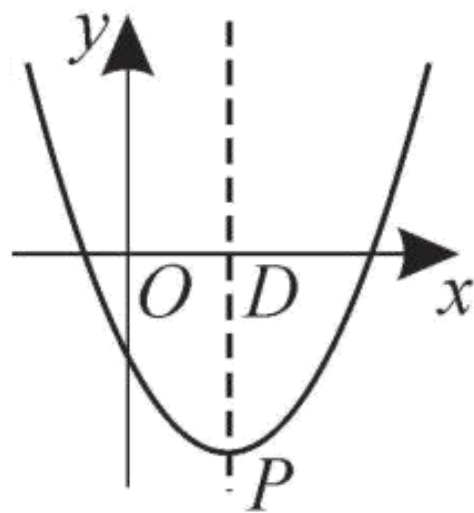


图1

(2)如图2, 当 $OM=OP=\frac{\sqrt{13}}{2}$ 时, 求 a 的值;

解: (2)如图2, 过点 $M(m, 1)(m>1)$ 作 $MH\perp x$ 轴, 垂足为 H , 则 $\angle MHO=90^\circ$, $HM=1$, $OH=m$.

在 $\text{Rt}\triangle MOH$ 中, 由勾股定理, 得 $HM^2+OH^2=OM^2$,

$$\therefore 1+m^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2,$$

解得 $m_1=\frac{3}{2}$, $m_2=-\frac{3}{2}$ (不合题意, 舍去).

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

$\therefore y=a(x-1)^2+k$, $\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

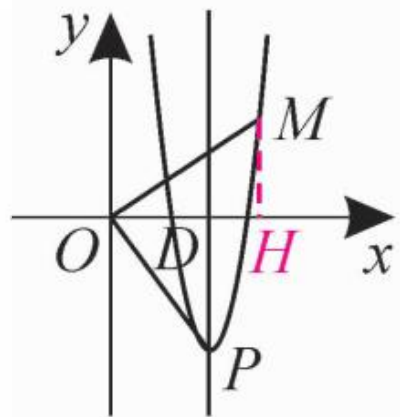


图2

∵ 对称轴与 x 轴相交于点 D , ∴ $OD=1$, $\angle ODP=90^\circ$.
在 $\text{Rt}\triangle OPD$ 中, 由勾股定理, 得 $OD^2 + PD^2 = OP^2$,

$$\therefore 1 + PD^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2,$$

解得 $PD = \frac{3}{2}$ 或 $PD = -\frac{3}{2}$ (不合题意, 舍去).

由 $a > 0$, 得该抛物线顶点 P 的坐标为 $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$,
∴ 该抛物线的解析式为 $y = a(x-1)^2 - \frac{3}{2}$.

∵ 点 $M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ 在该抛物线上,

$$\therefore \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 a - \frac{3}{2} = 1, \text{ 解得 } a = 10.$$

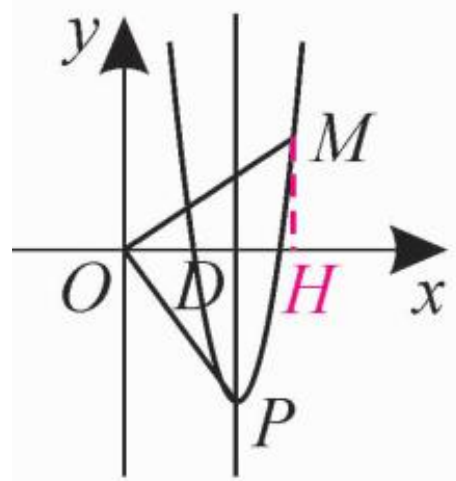


图2

【深入探究】

(3)如图3, 若 N 是抛物线上的点, 且点 N 在第四象限, $\angle MDN=90^\circ$, $DM=DN$, 点 E 在线段 MN 上, 点 F 在线段 DN 上, $NE+NF=\sqrt{2}DM$, 当 $DE+MF$ 取得最小值为 $\sqrt{15}$ 时, 求 a 的值.

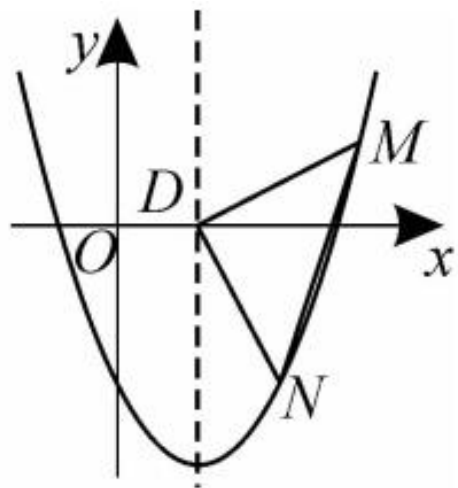


图3

解：(3)如图3，过点 $M(m, 1)(m>1)$ 作 $MH \perp x$ 轴，垂足为 H ，
则 $\angle MHO = 90^\circ$ ， $HM = 1$ ， $OH = m$ 。

$$\therefore DH = OH - OD = m - 1.$$

∴在Rt△DMH中, $DM^2 = DH^2 + HM^2 = (m-1)^2 + 1$.

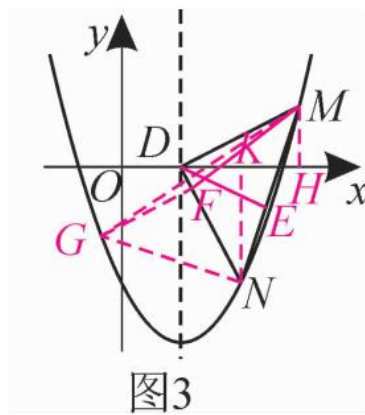
如图3，过点 N 作 $NK \perp x$ 轴，垂足为 K ，则 $\angle DKN = 90^\circ$.

在 $\triangle NDK$ 和 $\triangle DMH$ 中, $\begin{cases} \angle DKN = \angle MHD, \\ \angle DNK = 90^\circ - \angle NDK = \angle MDH, \\ DN = MD, \end{cases}$

$$\therefore \triangle NDK \cong \triangle DMH (\text{AAS}).$$

$$\therefore DK = MH = 1, \quad NK = DH = m - 1.$$

∴点 N 的坐标为 $(2, 1-m)$.



当满足条件的点 F 落在线段 GM 上时, $DE+MF$ 取得最小值, 即 $GM=\sqrt{15}$.

在Rt△GMN中， $GM^2 = NG^2 + MN^2 = DM^2 + 2DM^2$,

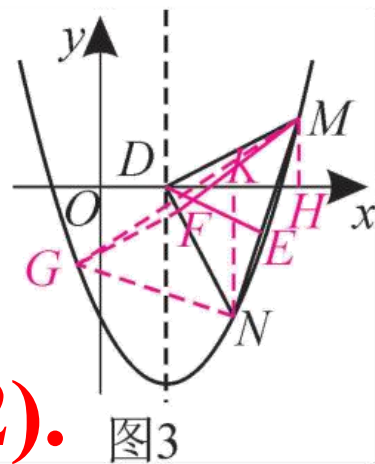
$$\therefore (\sqrt{15})^2 = 3DM^2, \text{ 解得 } DM^2 = 5.$$
$$\therefore (m-1)^2 + 1 = 5,$$

解得 $m_1=3$, $m_2=-1$ (不合题意, 舍去).

∴点 M 的坐标为 $(3, 1)$, 点 N 的坐标为 $(2, -2)$.

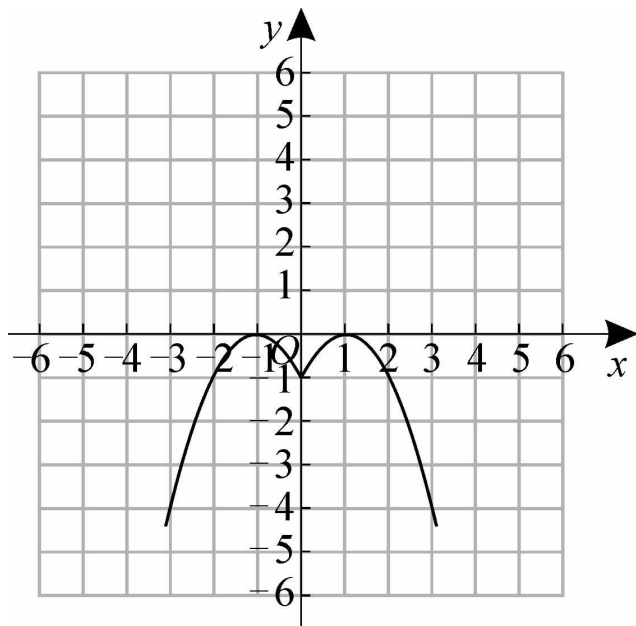
∵ 点 $M(3, 1)$, $N(2, -2)$ 都在抛物线 $y = a(x-1)^2 + k$ 上,

$$\therefore \begin{cases} (3-1)^2 a + k = 1, \\ (2-1)^2 a + k = -2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ k = -3. \end{cases}$$



中考热点④ 类二次函数探究与综合

12. (2024·白云区校级月考)小爱同学学习二次函数后，对函数 $y=-(|x|-1)^2$ 进行了探究. 在经历列表、描点、连线步骤后，得到如图所示的函数图象，请根据函数图象，解答下列问题：

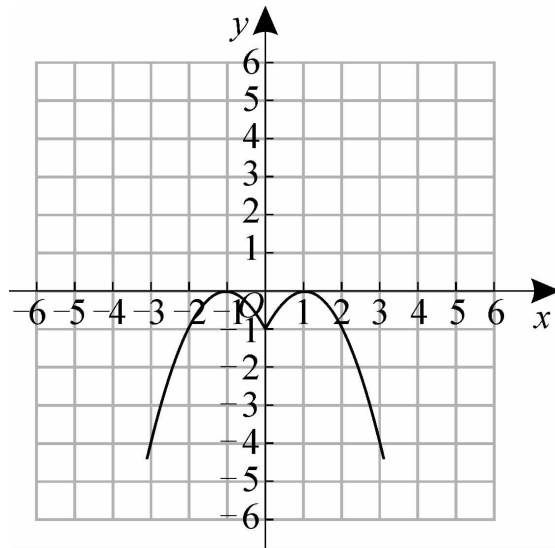


(1)观察探究:

①写出该函数的一条性质: 函数图象关于y轴对称
(答案不唯一);

②方程 $-(|x|-1)^2=-1$ 的解为: $x=-2$ 或 $x=0$ 或 $x=2$;

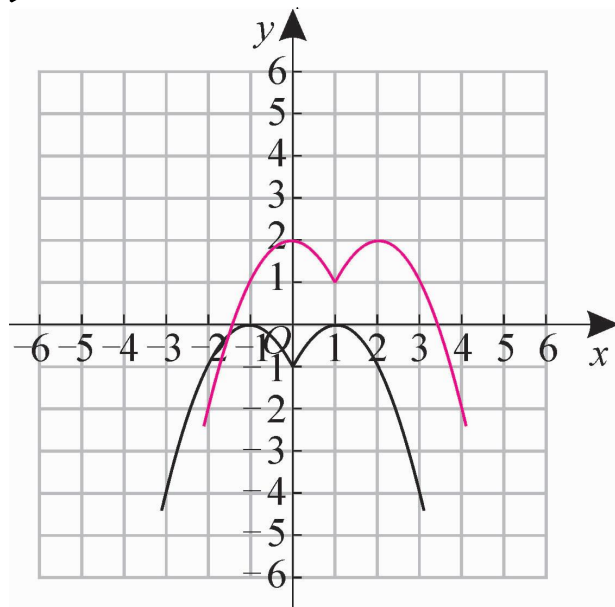
③若方程 $-(|x|-1)^2=m$ 有四个实数根, 则 m 的取值范围是 $-1<m<0$.



(2)延伸思考:

将函数 $y=-(|x|-1)^2$ 的图象经过怎样的平移可得到函数 $y_1=-(|x-1|-1)^2+2$ 的图象? 写出平移过程, 并直接写出当 $1<y_1\leq 2$ 时, 自变量 x 的取值范围.

解: (2)如图, 将函数 $y=-(|x|-1)^2$ 的图象向右平移1个单位长度, 再向上平移2个单位长度可得到函数 $y_1=-(|x-1|-1)^2+2$ 的图象. 当 $1<y_1\leq 2$ 时, 自变量 x 的取值范围是 $-1<x<3$ 且 $x\neq 1$.



中考热点⑤ 二次函数新定义

13. (2024·海珠区校级月考)我们约定：若抛物线 C_1 的解析式为 $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$ 且 $a\neq b$), 抛物线 C_2 的解析式为 $y=bx^2+cx+a$, 则称 C_1 与 C_2 互为“湘一相依抛物线”. 例如：抛物线 $C_1: y=-x^2+2x+3$ 与抛物线 $C_2: y=2x^2+3x-1$ 就是一组“湘一相依抛物线”. 根据该约定, 解答下列问题:

(1)已知抛物线 $C_1: y = -2x^2 + x - 5$, 求其“湘一相依抛物线” C_2 的解析式;

解: (1)依题意, 得抛物线 C_1 的“湘一相依抛物线” C_2 的解析式为 $y = x^2 - 5x - 2$.

(2)若抛物线 $C_1: y=ax^2-ax+2c$ 的顶点在其“湘一相依抛物线” C_2 上, 试求出抛物线 C_2 经过的定点坐标;

解: (2) $y=ax^2-ax+2c=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2c-\frac{1}{4}a,$

$\therefore C_1$ 的顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 2c-\frac{1}{4}a\right).$

$\therefore$ 抛物线 C_1 的“湘一相依抛物线” C_2 的解析式为 $y=-ax^2+2cx+a$, 且抛物线 C_1 的顶点在 C_2 上,

$$\therefore -\frac{1}{4}a + c + a = 2c - \frac{1}{4}a.$$

$$\therefore c = a.$$

$$\therefore C_2: y = -ax^2 + 2ax + a.$$

$$\therefore \text{当 } y=0 \text{ 时, } -ax^2 + 2ax + a = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_2 \text{ 过定点 } (1 + \sqrt{2}, 0), (1 - \sqrt{2}, 0).$$

(3) 已知抛物线 $C_1: y = mx^2 + nx + t$ (m, n, t 为实数且 $m \neq 0, m \neq -1$) 与 y 轴相交于点 A , 其“湘一相依抛物线” C_2 与 y 轴相交于点 B (点 A 在点 B 的上方). 抛物线 C_1 与 C_2 始终有一交点 C 在与 x 轴垂直的定直线上运动. 当 $AC \perp BC, AC = BC$, 且 m, n, t 满足 $m - 2n - t \leq m^2 \leq 4m + 2n + t$ 时, 抛物线 C_2 与直线 $y = -x + 1$ 相交于 M, N 两点, 求线段 MN 长度的取值范围.

解：(3) 抛物线 $C_1: y = mx^2 + nx + t$ 的“湘一相依抛物线”

C_2 的解析式为 $y = nx^2 + tx + m$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = mx^2 + nx + t, \\ y = nx^2 + tx + m, \end{cases} \text{ 解得 } x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{t-m}{m-n},$$

$$\therefore C(1, m+n+t).$$

对于 $C_1: y = mx^2 + nx + t$, 当 $x=0$ 时, $y=t$,

$$\therefore A(0, t). \text{ 同理 } B(0, m).$$

$$\because \text{点 } A \text{ 在点 } B \text{ 的上方}, \therefore AB = t - m.$$

$$\because AC \perp BC, AC = BC,$$

$$\therefore \frac{m+t}{2} = m+n+t, AB = t-m=2. \therefore t=2+m.$$

$$\therefore m = -n - 1, \quad t = -n + 1.$$

$$\therefore C_1: y = -(n+1)x^2 + nx - n + 1,$$

$$C_2: y = nx^2 + (-n+1)x - n - 1.$$

$$\because m - 2n - t \leq m^2 \leq 4m + 2n + t, \quad \therefore 2 \leq m \leq 3.$$

$$\therefore 2 \leq -n - 1 \leq 3. \quad \therefore -4 \leq n \leq -3.$$

联立
$$\begin{cases} y = nx^2 + (-n+1)x - n - 1, \\ y = -x + 1, \end{cases}$$

整理，得 $nx^2 + (-n+2)x - n - 2 = 0.$

设 $nx^2 + (-n+2)x - n - 2 = 0$ 的两个根为 $x_1, x_2,$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{n-2}{n}, \quad x_1 x_2 = \frac{-n-2}{n}.$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{4}{n} + 5 = 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)^2 + 4.$$

$$\therefore y_1 = -x_1 + 1, \quad y_2 = -x_2 + 1,$$

$$\therefore y_1 - y_2 = x_2 - x_1.$$

$$\therefore (y_1 - y_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 = 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)^2 + 4.$$

$$\therefore MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 8\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)^2 + 8.$$

$$\because -4 \leq n \leq -3, \therefore -\frac{1}{3} \leq \frac{1}{n} \leq -\frac{1}{4}.$$

$\therefore$ 当 $\frac{1}{n} = -\frac{1}{3}$ 时, MN^2 有最小值 $\frac{74}{9}$, 此时 MN 有最小值 $\frac{\sqrt{74}}{3}$;

当 $\frac{1}{n} = -\frac{1}{4}$ 时, MN^2 有最大值 $\frac{17}{2}$, 此时 MN 有最大值 $\frac{\sqrt{34}}{2}$.

$$\therefore \frac{\sqrt{74}}{3} \leq MN \leq \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

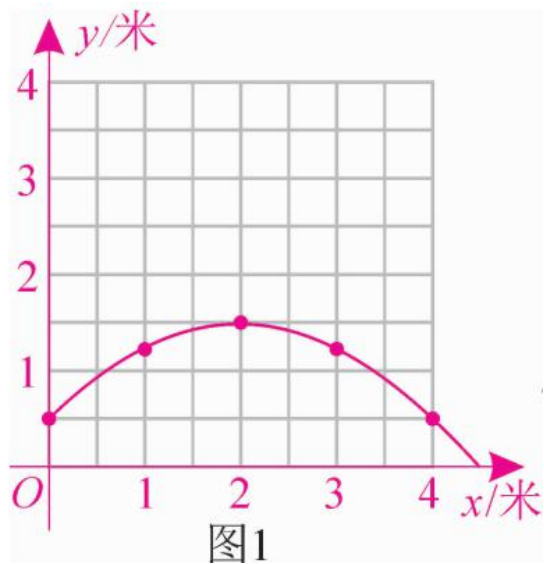
中考热点⑥ 二次函数综合与探究

14. (2024·东莞校级模拟) 【综合实践】

某公园在人工湖里安装一个喷泉，在湖心处竖直安装一根水管，在水管的顶端安一个喷水头，喷出的水柱形状可以看作是抛物线的一部分．若记水柱上某一位置与水管的水平距离为 x 米，与湖面的垂直高度为 y 米，下面的表中记录了 x 与 y 的五组数据：

$x/\text{米}$	0	1	2	3	4
$y/\text{米}$	0.5	1.25	1.5	1.25	0.5

(1)在下面网格(图1)中建立适当的平面直角坐标系, 并根据表中所给数据画出表示 y 与 x 函数关系的图象.



解: (1)以水管与湖面的交点为原点, 水管所在的直线为纵轴建立平面直角坐标系, 函数图象如图1所示.

(2)若水柱最高点距离湖面的高度为 m 米, 则 $m=1.5$, 并求出 y 与 x 的函数表达式.

解: (2)由图1可得函数图象的顶点坐标为 $(2, 1.5)$,

$\therefore$ 水柱最高点距离湖面的高度为1.5米. $\therefore m=1.5$.

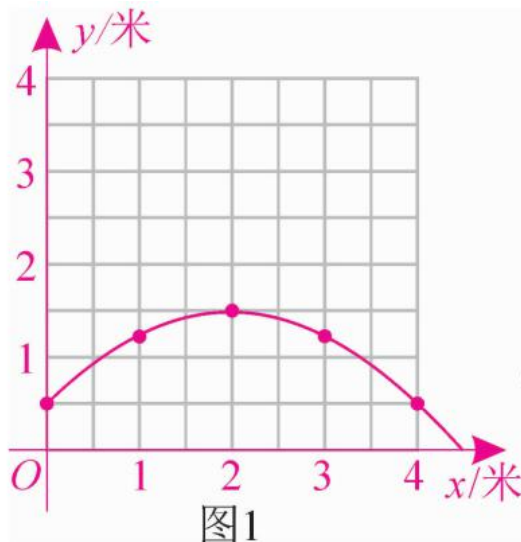
根据图象可设二次函数的表达式为 $y=a(x-2)^2+1.5$.

将 $(0, 0.5)$ 代入, 得 $a=-\frac{1}{4}$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为

$$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1.5=-\frac{1}{4}x^2+x+0.5.$$

故答案为1.5.



(3)现公园想通过喷泉设立新的游玩项目，准备通过只调节水管露出湖面的高度，使得游船能从抛物线形水柱下方通过，如图2所示，为避免游船被喷泉淋到，要求游船从抛物线形水柱下方中间通过时，顶棚上任意一点到水柱的竖直距离均不小于0.5米，已知游船顶棚宽度为3米，顶棚到湖面的高度为2米，那么公园应将水管露出湖面的高度(喷水头忽略不计)至少调节到多少米才能符合要求？请通过计算说明理由。(结果保留一位小数)

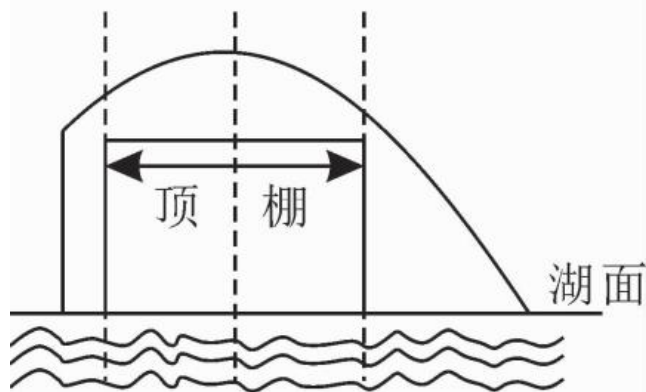
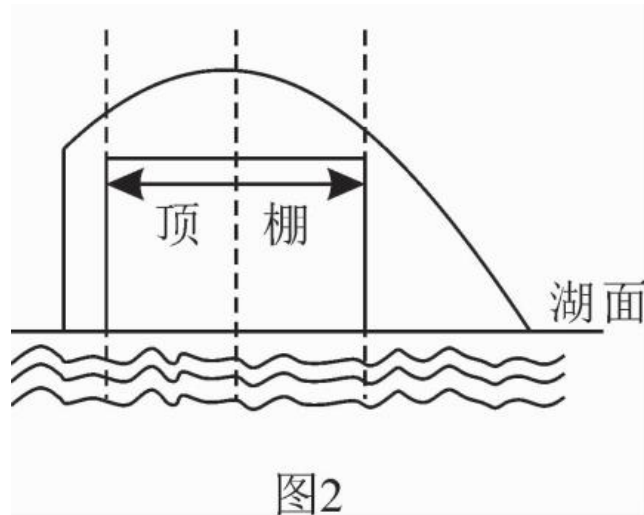


图2

解：(3)设调节后的水管喷出的抛物线的表达式为

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + n.$$

由题意可知，当横坐标为 $2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ 时，
纵坐标的值不小于 $2 + 0.5 = 2.5$ ，



$$\therefore -\frac{1}{4} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} + n \geq 2.5, \text{ 解得 } n \geq \frac{33}{16} \approx 2.1.$$

$\therefore$ 公园应将水管露出湖面的高度至少调节到约2.1米才能符合要求.

15. (2024·新会区校级月考)【综合与实践】某数学兴趣小组对数学学习中有关汽车的刹车距离有疑惑，于是他们走进汽车研发中心考察刹车距离.

【知识背景】“道路千万条，安全第一条.”刹车系统是车辆行驶安全的重要保障，由于惯性的作用，行驶中的汽车在刹车后还要继续向前行驶一段距离才能停止，这段距离称为刹车距离.

【探究发现】汽车研发中心设计了一款新型汽车，现在模拟汽车在高速公路上以某一速度行驶时，对它的刹车性能进行测试，兴趣小组成员记录其中一组数据如下表：

刹车后行驶的时间 t/s	0	1	2	3
刹车后行驶的距离 y/m	0	27	48	63

发现：①开始刹车后行驶的距离 y (单位：m)与刹车后行驶的时间 t (单位：s)之间成二次函数关系；②汽车刹车后行驶的距离 y 随刹车后行驶的时间 t 的增大而增大，当刹车后行驶的距离最远时，汽车完全停止.

【问题解决】 请根据以上信息，解答下列问题：

(1)求 y 关于 t 的函数解析式. (不要求写出自变量的取值范围)

解：(1)设 y 关于 t 的函数解析式为 $y=at^2+bt+c$.

将 $(0, 0)$, $(1, 27)$, $(2, 48)$ 代入,

$$\text{得} \begin{cases} c=0, \\ a+b+c=27, \\ 4a+2b+c=48, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=-3, \\ b=30, \\ c=0. \end{cases}$$

$\therefore y$ 关于 t 的函数解析式为 $y=-3t^2+30t$.

(2)若汽车刹车4 s后，行驶了多远距离.

解：(2)由(1)得 y 关于 t 的函数解析式为 $y = -3t^2 + 30t$,

当 $t = 4$ 时， $y = -3 \times 4^2 + 30 \times 4 = 72$,

$\therefore$ 汽车刹车4 s后，行驶了72米.

(3)若汽车司机发现正前方73 m处有一辆抛锚的车停在路面，立刻刹车，请问该车在不变道的情况下是否会撞到抛锚的车？试说明理由.

解：(3)会. 理由如下：

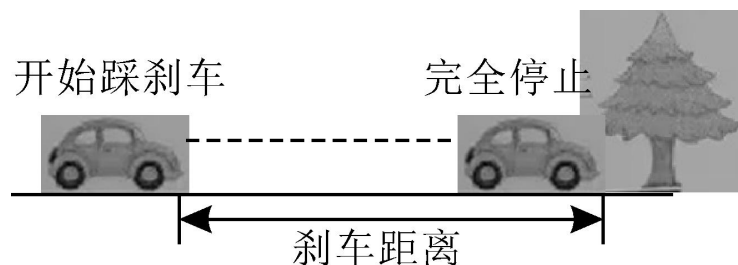
由(1)得 y 关于 t 的函数解析式为 $y = -3t^2 + 30t$,

$$\therefore y = -3t^2 + 30t = -3(t-5)^2 + 75.$$

$\therefore$ 当 $t=5$ 时，汽车完全停止，行驶了75米.

$$\therefore 75 > 73,$$

$\therefore$ 该车在不变道的情况下会撞到抛锚的车.



温馨提示



多分思维 高效学习

本课件由阅盟教育出品，仅限教师教学使用。

本课件所有权和著作权归本公司所有，
任何人不得以非法形式进行销售或传播，违者必究！